

EXERCICE 3**5 points**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{e} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \text{ pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3 . On détaillera les calculs.
2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n . Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	<code>def suite(n):</code>
L_2	<code>.....</code>
L_3	<code>for i in range(1, n):</code>
L_4	<code>u=.....</code>
L_5	<code>return u</code>

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \frac{1}{n} \leq e$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.
4.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \frac{n}{e^n}$.
 - b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n) .